



فصل چهارم- دو قضیه مهم انتگرال

فعالیت ۱. انتگرال نامعین زیر را بدست آورید.

$$\int \ln x dx$$

راهنمایی: مشتق $x \ln x$ را محاسبه کنید.

فعالیت ۲. انتگرال معین زیر را بدست آورید.

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx$$

راهنمایی: از فرمول انتگرال جزء به جزء استفاده کنید:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(b)g(b) - f(a)g(a)] - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

فعالیت ۳.

الف) فرمول انتگرال جزء به جزء را اثبات کنید.

ب) فرمول انتگرال جزء به جزء را با نمادگذاری لایب‌نیتس بازنویسی کنید.

فعالیت ۴ (دستور تعویض متغیر در انتگرال (صورت انتگرال نامعین)). فرض کنید $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ ، $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ که در آن I و J بازه‌هایی در \mathbb{R} هستند، به طوری که $\phi(I) \subset J$ و F مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته‌اند و $F' = f$. تابع اولیه‌ای برای $(f \circ \phi) \cdot \phi'$ بیابید.

فعالیت ۵.

الف) تابع اولیه $\frac{1}{\sqrt{x^2-x^4}}$ که دامنه تعریف آن $], 1[$ است را بدست آورید.

راهنمایی: تعریف کنید $\phi(x) = \frac{1}{x} - 1$.

ب) انتگرال نامعین $\int \sqrt{a^2+x^2} dx$ را که در آن a مقداری مثبت است، محاسبه کنید.

قضیه ۱ (دستور تعویض متغیر در انتگرال (صورت انتگرال معین)). فرض کنید تابع $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ مشتق پذیر با مشتق پیوسته باشد، $\phi(\alpha) = a$ و $\phi(\beta) = b$ و $\phi[\alpha, \beta] \subset I$ ، و $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت

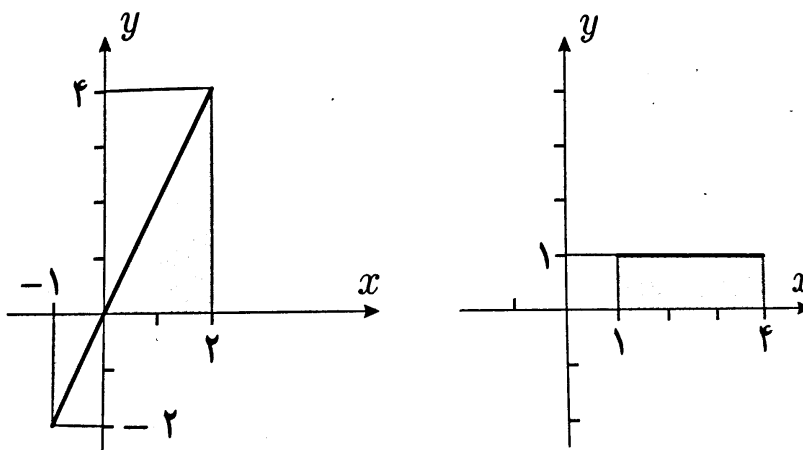
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_a^b f(x) dx.$$

فعالیت ۶. قضیه ۱ را اثبات کنید.

فعالیت ۷. با استفاده از انتگرال، مساحت دایره را به دست آورید.

فعالیت ۸. فرض کنید $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ تابع ثابت با مقدار ۱ باشد و $\phi : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ، $\phi(t) = t^2$. با توجه به شکل ۱ تعبیری هندسی از فرمول تعویض متغیر در انتگرال برای انتگرال زیر بیابید. به عبارت دیگر تعبیری هندسی از حضور مشتق تابع ϕ در دستور تعویض متغیر در انتگرال ارائه دهید.

$$\int_1^4 f(x) dx = 3, \quad \int_{-1}^2 f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_{-1}^2 (2t) dt = 3$$



شکل ۱